### Задача 1

В королевстве 8 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в любой другой, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более *k* дорог. При каких *k* это возможно?

### Решение:

  Если  *k* = 2,  то из города *А* можно "за один ход" попасть не более чем в два города, а из них "следующим ходом" – не более чем в 4. Итого, из *А* можно попасть не более чем в 6 городов, а нужно – в 7.   
  Для  *k* = 3  расположим города в вершинах правильного восьмиугольника, а дороги пустим по всем сторонам и большим диагоналям.

### Ответ:

При  *k* > 2.

### Задача 2

В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

### Решение:

Разобьем каждую улицу на две полуулицы и сосчитаем их число. Если *n*– число перекрестков в городе, а *ci*– число внешних дорог цвета *i*, то числа полуулиц каждого цвета будут *n+c*1, *n+c*2, *n+c*3. Все эти числа четные, следовательно, четность чисел *c*1, *c*2, *c*3одинакова. По условию, *c*1*+c*2*+c*3*=*3. Значит, *c*1*=c*2*=c*3*=*1.

### Задача 3

На плоскости нарисовано несколько точек, некоторые пары точек соединены отрезками. Известно, что из каждой точки выходит не более k отрезков. Докажите, что точки можно покрасить в k+1 цвет таким образом, чтобы любые две точки, соединенные отрезком, были покрашены в разные цвета.

### Подсказка:

Используйте индукцию по числу точек.

### Решение:

Для одной точки утверждение задачи очевидно. Пусть утверждение задачи верно для n точек. Докажем его для n+1 точки. Пусть на плоскости нарисовано n+1 точек, некоторые пары из которых соединены отрезками. Рассмотрим одну из точек - A. На время забудем про нее и про выходящие из нее отрезки. По предположению индукции оставшиеся n точек можно покрасить в k+1 цвет таким образом, чтобы любые две точки, соединенные отрезком, были покрашены в разные цвета. Покрасим эти n точек нужным образом. Вспомним про точку A. Она соединена отрезками не более, чем с k точками. Поскольку цветов k+1, покрасим точку A в цвет, отличный от цветов точек, с которыми она соединена. Тем самым, получена требуемая раскраска точек.

### Задача 4

Гидры состоят из голов и шей (каждая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы *A* гидры. Но при этом из головы *A* мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми *A* не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее *N*, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем *N* ударов.

### Решение:

   Перейдем к графу, в котором головы – вершины, шеи – ребра, а удар по шеям, выходящим из головы *A* назовем *инвертированием*   
вершины *A*.  
   Если есть вершина *X* степени не больше 10, то достаточно инвертировать ее соседей, и она отделится. Если есть вершина, соединенная со всеми вершинами, за исключением *n*  (*n* ≤ 9),  то нужно инвертировать сначала эту вершину, а затем те *n* вершин, с которыми она вначале не была соединена, и тогда эта вершина отделится.   
   Если же каждая вершина соединена хотя бы с 11 и не соединена хотя бы с 10 другими, то всего вершин не меньше 22, и ребер не меньше  22·11 : 2 > 100.  
   *Пример* гидры, которую нельзя разрубить за 9 ударов: две группы по 10 голов и 100 шей, соединяющих все пары голов из разных групп.  
   Заметим, что состояние ребра между вершинами *A* и *B* не меняется тогда и только тогда, когда вершины *A* и *B* инвертированы в сумме четное число раз. Поэтому порядок отрубания вершин не важен и бессмысленно инвертировать вершину дважды.  
   Пусть по нашей гидре нанесено не более 9 ударов. Тогда в каждой группе осталось по неинвертированной голове, и поэтому есть шея из одной группы в другую; более того, все неинвертированные головы образуют связное множество. С другой стороны, каждая неинвертированная голова связана со всеми инвертированными в своей группе. Поэтому, если в каждой части инвертировано хотя бы по одной голове, то гидра осталась связной. Если же все инвертированные головы в одной части, то гидра тоже осталась связной: каждая неинвертированная голова в этой части связана со всей другой частью и со всеми инвертированными.

### Ответ:

*N* = 10.

### Задача 5

В некотором государстве было 2002 города, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью.  
  
Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.

### Решение:

Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра– дорогам, существовавшим в стране до начала всех преобразований. По условию, над этим графом несколько раз подряд проделывается следующая операция: удаляются все ребра некоторого простого цикла, а все вершины этого цикла соединяются с новой вершиной. Докажем, что в графе, получившемся после окончания всех преобразований, все вершины исходного графа будут иметь степень 1. Поскольку таких вершин ровно 2002, это даст нам полное решение задачи.  
  
Рассмотрим произвольную вершину*v*, принадлежащую исходному графу. По условию, при удалении этой вершины (и всех выходящих из нее ребер) из исходного графа образуется связный граф. Докажем, что это свойство сохраняется после применения к графу описанной в условии операции.  
  
Рассмотрим произвольный граф*G*и вершину*u*этого графа, при удалении которой образуется связный граф.  
Пусть после применения к графу*G*описанной в условии операции образовался граф*G'*. Рассмотрим произвольный путь в графе*G*, не проходящий через*u*. В графе*G'*некоторые ребра этого пути могут быть удалены, но их концы должны быть соединены с новой вершиной (обозначим ее*w*). Таким образом, заменив минимальный участок пути, содержащий все удаленные ребра, на пару ребер, соединяющих концы этого участка с вершиной*w*, мы получим путь в графе*G'*, имеющий те же концы и не проходящий через*u*. Это означает, что если мы удалим из графа*G'*вершину*u*, то для любых двух вершин получившегося графа мы можем найти соединяющий их путь. Для старых (отличных от*w*) вершин этот путь получается описанным выше способом из пути, соединяющего их в графе, образовавшемся при удалении*u*из графа*G*, а вершина*w*должна быть соединена ребром хотя бы с одной из старых вершин, которая соединена путями со всеми остальными вершинами данного графа. Таким образом, при удалении вершины*u*из графа*G'*также образуется связный граф.  
  
Из доказанного следует, что после всех преобразований при удалении из получившегося графа вершины*v*образуется связный граф. Тогда, если степень вершины*v*в получившемся графе больше1, то между двумя соединенными с*v*вершинами есть не проходящий через*v*путь. Этот путь вместе с вершиной*v*и двумя выходящими из нее ребрами образует в получившемся графе простой цикл, что по условию невозможно. Таким образом, степень вершины*v*в этом графе равна 1.

### Задача 6

Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что Оля может выиграть.

### Решение:

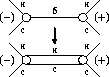
Отметим на схеме *максимально возможное* число маршрутов без общих концов. Острова разобьются на пары и несколько (не менее одного) отдельных островов. Прилетим на какой-нибудь отдельный остров. Если Максим ходит на остров отмеченного маршрута, Оля отвечает ходом на 2-й остров этого маршрута. Предположим, что Максиму удастся сделать ход на отдельный остров. Путь с начала до этого острова состоит из четного числа 2*k* островов: из  *k* – 1  отмеченного маршрута и двух отдельных островов. Но этот путь можно разбить на *k* маршрутов, и они, вместе с непосещенными отмеченными маршрутами дадут *большее* число маршрутов, что противоречит максимальности. Значит, ход Максима на отдельный остров невозможен, и Оля выигрывает.

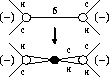
### Задача 7

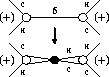
Улицы города Дужинска – простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем.

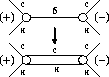
### Решение:

***Первое решение***Заменим каждую белую улицу города на две – синюю и красную, соединив синим цветом концы синих улиц, соседних с белой, а красным цветом – концы соседних с ней красных улиц (см. 1081-1084). В соответствии с рисунками 1081-1084 будем называть белые улицы улицами типов а}, б}, в} и г}, а их количества обозначим соответственно *n а*, *n б*, *n в*и *n г*. В случаях, изображенных на рис. 1082 и 1083, будем считать, что красная и синяя улицы, которыми мы заменили белую, пересекаются в точке, отличной от вершин ломаных, которыми являются эти улицы.

**

**

**

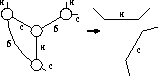
**

Теперь все синие улицы образуют несколько многоугольников. Назовем их синими. Аналогично, красные улицы образуют несколько красных многоугольников. Ясно, что границы двух многоугольников разного цвета либо не пересекаются, либо пересекаются в четном числе точек (если границы пересекаются, то граница одного из многоугольников входит внутрь второго столько же раз, сколько и выходит из него). Но число точек пересечения границ многоугольников разного цвета равно числу белых улиц типов б} и в}, т.е. *n б+n в*. Значит, число *n б+n в*– четное. Остается заметить, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков равна 2(*n б-n в*)*=*2(*n б+n в*)*-*4*n в*и, следовательно, кратна четырем. ***Второе решение***Рассмотрим произвольную (например, белую) улицу, соединяющую перекрестки *A*и *B*различной ориентации (т.е. положительный и отрицательный перекрестки), если такая улица в городе есть. Удалим эти перекрестки и все улицы, ведущие из *A*в *B*. Оставшиеся улицы одного цвета соединим между собой тем же цветом (1085-1087; *http://www.problems.ru/show_document.php?id=1635952*– обозначение пустого множества). При этом справедливость условий задачи не нарушается, а разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков сохраняется. Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока в городе не останется ни одной пары соединенных перекрестков различной ориентации. Без ограничения общности будем считать, что в городе остались только положительные перекрестки. 

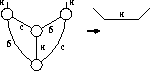
*http://www.problems.ru/show_document.php?id=1635953*

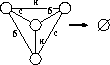
*http://www.problems.ru/show_document.php?id=1635954*

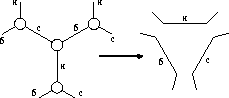
*http://www.problems.ru/show_document.php?id=1635955*

**

(Вообще говоря, город теперь состоит из нескольких не связанных между собой частей, в каждой из которых все перекрестки либо положительные, либо отрицательные. Отрицательные перекрестки, если они есть, мы будем выбрасывать по той же самой схеме, которая описана ниже для положительных перекрестков.) 

**

**

**

Рассмотрим произвольный такой перекресток и три перекрестка, соединенные с ним (очевидно, что в любом удовлетворяющем условию задачи городе, в котором все перекрестки положительны, можно найти такие четыре перекрестка; эти перекрестки не обязательно должны быть различными, случай различных показан на 1091). Удалим эти четыре перекрестка и все соединяющие их улицы. Оставшиеся улицы одного цвета соединим между собой тем же цветом (см. 1088-1091). При этом снова не нарушается справедливость условий задачи, а число положительных перекрестков уменьшается на 4. Эту операцию можно продолжать до тех пор, пока улиц в городе не останется вовсе. Но тогда разность между числом положительных и отрицательных перекрестков станет равна нулю. В таком случае первоначально (для исходного города) эта разность кратна четырем. 11